Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. (103, 106, 108, 158, 161, 204)

FGN Algèbre 3 p. 67

Soit G un sous groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ et G_0 la composante connexe par arcs de l'identité.

Lem 1 : G_0 est un sous-groupe de G.

démo :
- Par définition de G_0, $Id \in G_0$.
- Soit $g, h \in G_0$, donc il existe $\gamma, \gamma' : [0,1] \longrightarrow G$ (chemins continues) tels que $\gamma(0) = Id = \gamma'(0)$ et $\gamma(1) = g$ et $\gamma'(1) = h$.

On considère $\tilde{\gamma} : t \longmapsto \gamma(t)(\gamma'(t))^{-1}$. Comme $\gamma(t)$ et $\gamma'(t) \in G$ et que G est un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ on a $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \in G$. L'application $g \longmapsto g^{-1}$ est continue sur $SO_3(\mathbb{R})$ car elle est polynomiale en les coefficient de g.

Ainsi $\tilde{\gamma}$ est un chemin continue de $[0,1]$ vers G qui relie $\tilde{\gamma}(0) = Id$ à $\tilde{\gamma}(1) = gh^{-1}$.

D'où $gh^{-1} \in G_0$.

Lem 2 : Si G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$ alors G_0 est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$.

démo : Soit $g \in G_0$, donc il existe $\gamma : [0,1] \to G$ continue tel que $\gamma(0) = Id$ et $\gamma(1) = g$. Soit $h \in SO_3(\mathbb{R})$.
On considère $\tilde{\gamma} : t \longmapsto h\gamma(t)h^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$. Comme G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$ et que $\gamma(t) \in G$ $\forall t \in [0,1]$, on a $h\gamma(t)h^{-1} \in G$ $\forall t \in [0,1]$. De plus $\tilde{\gamma}$ est continue par composée d'applications continues.
Ainsi $\tilde{\gamma}$ est un chemin continue de $[0,1]$ vers G qui relie $\tilde{\gamma}(0) = Id$ à $\tilde{\gamma}(1) = hgh^{-1}$.
D'où $hgh^{-1} \in G_0$.

Lem 3 : On suppose que G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$, non réduit à Id et connexe par arcs. Alors $G = SO_3(\mathbb{R})$.

démo : Soit $g \in SO_3(\mathbb{R})$ une rotation d'angle θ, alors il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

Ceci nous donne que $tr(g) = 2\cos\theta + 1$ et donc

$$f : g \in SO_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \cos(\theta) = \frac{tr(g) - 1}{2}$$ est une application continue.

Il nous suffit alors de montrer que f prend la valeur -1. Mais par la connexité de G, on va montrer qu'il existe un élément de G tel que $\cos(\theta) = 0$.

Comme $G \neq \{Id\}$, il existe $h \in G \setminus \{Id\}$. Quitte à considérer h^{-1} on peut supposer que $\theta \in]0, \pi]$.

Si $\cos\theta \leq 0$, on prend $s = h$.
Sinon, on remplace h par une puissance de h de sorte à avoir $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $\cos(\theta) \leq 0$.

Puisque G est connexe par arcs, il existe γ un chemin continue qui relie Id à s.

Donc $f \circ \gamma(t) = \dfrac{tr(\gamma(t)) - 1}{2}$ est continue par composée d'applications continue et elle relie 1 à $\cos\theta \leq 0$

D'après le TVI, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $f \circ \gamma(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm \frac{\pi}{2}$ et donc r^2 a un angle de π. Ainsi r^2 est un retournement.

Comme tous les retournements sont conjugués entre-eux et que G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$ on a que G contient tous les retournements.

Or $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements. Donc $G = SO_3(\mathbb{R})$.

Thm : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

démo : Soit G un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$ et considérons G_0 la composante connexe de Id.

D'après le lemme 2, G_0 est un sous groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$ et il est connexe par arcs par définition.

* Si $G_0 \neq \{Id\}$ alors par le lemme 3, $G_0 = SO_3(\mathbb{R})$ donc $G = SO_3(\mathbb{R})$.

* Sinon $G_0 = \{Id\}$. Montrons alors que $G = \{Id\}$.

On remarque que toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons.

En effet, si g' est dans la composante de g, relié par le chemin continue γ, alors

$t \longmapsto g^{-1}\gamma(t)$ est chemin continue de G reliant Id à $g^{-1}g'$.

Ainsi $g^{-1}g' \in G_0 = \{Id\}$ donc $g = g'$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $G \neq \{Id\}$. Soit $g \in G \setminus \{Id\}$.

Soit h une rotation quelconque différente de Id et θ la mesure de son angle.

L'application $t \longmapsto h_t = P\tilde{R}_{\theta t}P^{-1}$ où $\tilde{R}_{\theta t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t\theta & -\sin t\theta \\ 0 & \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$ est continue et donc

l'application $t \longmapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin continue de G car G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$ reliant g à hgh^{-1}.

Ainsi hgh^{-1} appartient à la composante de g. Celle-ci étant réduite à un singleton, on obtient $hgh^{-1} = g$.

Autrement dit $g \in Z(SO_3(\mathbb{R}))$. Or $Z(SO_3(\mathbb{R})) = Id$. Donc ceci est absurde.

D'où $G = \{Id\}$.

Questions : Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

- Matrice des éléments de $SO_3(\mathbb{R})$

Soit $g \in SO_3(\mathbb{R})$, χ_g est un polynôme de degré 3, donc il a une racine réelle : ± 1 car g isométrie
Donc $Sp(g) = \{1, \lambda, \bar{\lambda}\}$ avec $\lambda = e^{i\theta}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Soit v un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 1 et $P = v^\perp$. Alors g préserve P et $Sp(g_{|P}) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$. Donc $g = P \tilde{R_\theta} P^{-1}$ avec $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\tilde{R_\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

- retournements conjugués entre-eux ?

Soit r un retournement et soit $g \in SO_3(\mathbb{R})$ alors montrons que grg^{-1} est encore un retournement.
$tr(grg^{-1}) = tr(rgg^{-1}) = tr(r)$ donc $\cos(\theta_{grg^{-1}}) = \cos(\theta_r) = \pi$. D'où grg^{-1} est un retournement.

- $Z(SO_3(\mathbb{R})) = Id$

Si $g \in SO_3(\mathbb{R})$ et commute avec les rotations d'axe d alors g fixe d.
Si $g \in Z(SO_3(\mathbb{R}))$, alors $\tilde{g}$ fixe toutes les droites vectorielles donc $\tilde{g}$ est une homothétie
Or $g \in SO_3(\mathbb{R})$ donc $g = Id$.
$\uparrow$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mais si on prend $v \in E_1$ et $v' \in E_{-1}$ alors la droite engendrée par $v+v'$ n'est pas stabilisée d'où $g = Id$.